ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΧΑΝΙΩΝ
ΚΡΟΚΙΔΑ 32 – 73100 ΧΑΝΙΑ
Τηλ: 697 6992542 – ΦΑΞ: 28210 56692
http://www.mathchan.gr

HELLENIC MATHEMATICAL SOCIETY
CHANIA BRANCH
KROKIDA 32– 73100 CHANIA
Tel : 697 6992542– FAX: 28210 56692
http://www.mathchan.gr

1ος ΤΟΠΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
ΧΑΝΙΑ, 12 Ιανουαρίου 2013

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha = 0,5^3 : (3^2 - 2^3) + 2014 - 0,1^2 \cdot 12,5$$

$$\beta = 1004 + 2^4 \cdot 3^2 \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(5 - \frac{1}{3}\right)$$

ΛΥΣΗ

$$\alpha = 0,5^3 : (3^2 - 2^3) + 2014 - 0,1^2 \cdot 12,5 = 0,125 : (9-8) + 2014 - 0,01 \cdot 12,5 =$$
$$= 0,125 : 1 + 2014 - 0,125 = 0,125 - 0,125 + 2014 = 2014$$

$$\beta = 1004 + 2^4 \cdot 3^2 \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(5 - \frac{1}{3}\right) = 1004 + 2^4 \cdot 3^2 \cdot \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{15}{3} - \frac{1}{3}\right) =$$
$$= 1004 + 2^4 \cdot 3^2 \cdot \frac{\cancel{3}}{2} \cdot \frac{14}{\cancel{3}} = 1004 + 2^3 \cdot \cancel{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{14}{\cancel{2}} = 1004 + 8 \cdot 9 \cdot 14 =$$
$$= 1004 + 1008 = 2012$$

Β) Για τις τιμές α και β που υπολογίσατε παραπάνω, να βρείτε έναν αριθμό ανάμεσα στους αριθμούς 1 και $\frac{\alpha}{\beta}$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2014}{2012}$ και $1 = \frac{2012}{2012}$, οπότε συγκρίνοντας τους αριθμητές βλέπουμε ότι ένας κατάλληλος ενδιάμεσος αριθμός είναι ο $\frac{2013}{2012}$, ώστε $1 = \frac{2012}{2012} < \frac{2013}{2012} < \frac{2014}{2012} = \frac{\alpha}{\beta}$.

ΘΕΜΑ 2ο

Γράφουμε έναν πενταψήφιο αριθμό χρησιμοποιώντας τα ψηφία 2, 3, 4 και 5.
Ένα από αυτά τα ψηφία θα υπάρχει δύο φορές στον αριθμό και τα υπόλοιπα μία φορά το καθένα.

Α) Ποιο ψηφίο πρέπει να υπάρχει δύο φορές ώστε να διαιρείται ο πενταψήφιος αριθμός από το 9;

ΛΥΣΗ

Συμβολίζουμε με x το ψηφίο που θα χρησιμοποιηθεί δύο φορές. Άρα ο αριθμός θα αποτελείται από τα ψηφία **2, 3, 4, 5** και **x**.
Γνωρίζουμε ότι για να διαιρείται ένας αριθμός από το 9, θα πρέπει και το άθροισμα των ψηφίων του να διαιρείται από το 9. Το άθροισμα των ψηφίων όμως είναι
$2 + 3 + 4 + 5 + x = \mathbf{14 + x}$
Συνεπώς:
Αν x = 2, το άθροισμα είναι 14 + 2 = 16, δεν διαιρείται από το 9
Αν x = 3, το άθροισμα είναι 14 + 3 = 17, δεν διαιρείται από το 9
Αν x = 4, το άθροισμα είναι 14 + 4 = 18, διαιρείται από το 9
Αν x = 5, το άθροισμα είναι 14 + 5 = 19, δεν διαιρείται από το 9

Άρα το ψηφίο που θα επαναληφθεί δύο φορές είναι το 4.

Β) Από τους πενταψήφιους αριθμούς που μπορούμε να κατασκευάσουμε με τον παραπάνω τρόπο, ποιος είναι:

i. Ο μικρότερος αριθμός που διαιρείται από το 9;
ii. Ο μεγαλύτερος περιττός αριθμός που διαιρείται από το 9;

ΛΥΣΗ

i. Αφού τα ψηφία που θα χρησιμοποιήσουμε είναι τα 2, 3, 4, 4 και 5, για να πετύχουμε το μικρότερο αριθμό βάζουμε ως πρώτο ψηφίο το μικρότερο (2), ως δεύτερο ψηφίο το δεύτερο μικρότερο (3) κ.ο.κ.

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 23445.

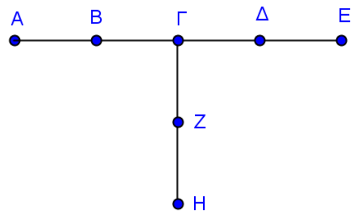
ii. Ένας αριθμός είναι περιττός όταν το τελευταίο ψηφίο του είναι και αυτό περιττός αριθμός. Άρα ο αριθμός θα πρέπει να έχει για τελευταίο ψηφίο ή το 5 ή το 3. Σκεφτόμενοι ανάλογα με πριν, παρατηρούμε ότι:

Με τελευταίο ψηφίο το 5, ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός είναι ο 44325.
Με τελευταίο ψηφίο το 3, ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός είναι ο 54423.

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 54423.

ΘΕΜΑ $3^{ο}$

Α) Στο διπλανό σχήμα πόσα και ποια τρίγωνα μπορούμε να φτιάξουμε με κορυφές 3 από τα σημεία: Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η ;



ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι δεν μπορούν και οι 3 κορυφές να είναι από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε γιατί δε σχηματίζεται τρίγωνο. Για τον ίδιο λόγο δε μπορούν να είναι και οι 3 κορυφές από τα σημεία Γ, Ζ, Η.

Άρα έχουμε δύο σενάρια:
$1^{ο}$ σενάριο: Η $1^{η}$ και η $2^{η}$ από τα Α, Β, Γ, Δ, Ε και η $3^{η}$ από τα Ζ, Η
$2^{ο}$ σενάριο: Η $1^{η}$ και η $2^{η}$ από τα Γ, Ζ, Η και η $3^{η}$ από τα Α, Β, Δ, Ε. Όμως τα τρίγωνα που έχουν την κορυφή Γ υπάρχουν ήδη και στο $1^{ο}$ σενάριο, και δε θα ξαναμετρηθούν.

Έτσι από το $1^{ο}$ σενάριο έχουμε τις εξής δυνατότητες για $1^{η}$ και $2^{η}$ κορυφή:

ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, ΓΔ, ΓΕ, ΔΕ

και καθεμιά από αυτές τις δυνατότητες μπορεί να συνδυαστεί είτε με το Ζ είτε με το Η για $3^{η}$ κορυφή:

ΑΒΖ, ΑΓΖ, ΑΔΖ, ΑΕΖ, ΒΓΖ, ΒΔΖ, ΒΕΖ, ΓΔΖ, ΓΕΖ, ΔΕΖ ή

ΑΒΗ, ΑΓΗ, ΑΔΗ, ΑΕΗ, ΒΓΗ, ΒΔΗ, ΒΕΗ, ΓΔΗ, ΓΕΗ, ΔΕΗ

Συνολικά λοιπόν υπάρχουν 10 + 10 = 20 τρίγωνα στο $1^{ο}$ σενάριο.

Και από το $2^{ο}$ σενάριο έχουμε τις εξής δυνατότητες για $1^{η}$ και $2^{η}$ κορυφή:

ΖΗ (αφού αποκλείσαμε τα ζευγάρια ΓΖ και ΓΗ που περιέχουν την Γ)

και μπορούμε για $3^{η}$ κορυφή να επιλέξουμε είτε το Α είτε το Β είτε το Δ είτε το Ε:

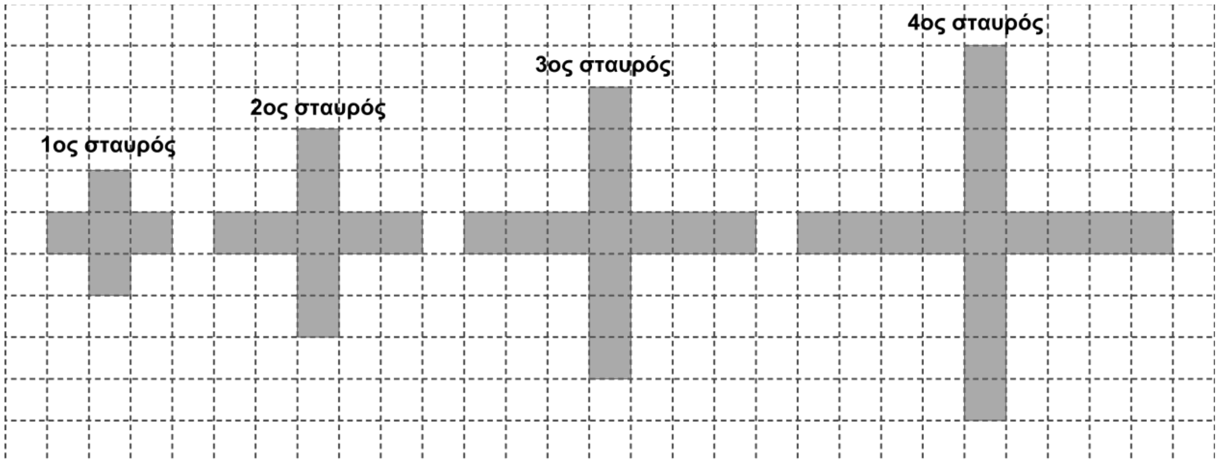
ΖΗΑ, ΖΗΒ, ΖΗΔ, ΖΗΕ

Συνολικά λοιπόν υπάρχουν 4 τρίγωνα στο $2^{ο}$ σενάριο.

Τελικά λοιπόν έχουμε 20 + 4 = 24 διαφορετικά τρίγωνα, τα εξής:

ΑΒΖ, ΑΓΖ, ΑΔΖ, ΑΕΖ, ΒΓΖ, ΒΔΖ, ΒΕΖ, ΓΔΖ, ΓΕΖ, ΔΕΖ, ΑΒΗ, ΑΓΗ, ΑΔΗ, ΑΕΗ, ΒΓΗ, ΒΔΗ, ΒΕΗ, ΓΔΗ, ΓΕΗ, ΔΕΗ, ΖΗΑ, ΖΗΒ, ΖΗΔ, ΖΗΕ

Β) Σχεδιάζουμε σταυρούς όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Αν συνεχίσουμε να σχεδιάζουμε με αυτόν τον τρόπο, να υπολογίσετε πόσα τετραγωνάκια θα καλύπτει ο 15ος σταυρός. Εξηγήστε πώς σκεφτήκατε.

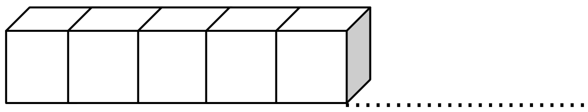


ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι κάθε σταυρός έχει ένα κεντρικό τετραγωνάκι και 4 ίσους βραχίονες.
Στον **1**ο σταυρό κάθε βραχίονας αποτελείται από **1** τετραγωνάκι.
Στον **2**ο σταυρό κάθε βραχίονας αποτελείται από **2** τετραγωνάκια.
Στον **3**ο σταυρό κάθε βραχίονας αποτελείται από **3** τετραγωνάκια
Στον **4**ο σταυρό κάθε βραχίονας αποτελείται από **4** τετραγωνάκια
Συνεχίζοντας λοιπόν, με το ίδιο σκεπτικό συμπεραίνουμε ότι στον 15ο σταυρό ο κάθε βραχίονας θα αποτελείται από 15 τετραγωνάκια.
Άρα οι 4 βραχίονες θα καλύπτουν $4 \cdot 15 = 60$ τετραγωνάκια, και μαζί με το κεντρικό τετραγωνάκι ο 15ος σταυρός συνολικά θα καλύπτει 60 + 1 = 61 τετραγωνάκια.

ΘΕΜΑ 4ο

Έχουμε κύβους που ο καθένας έχει ολική επιφάνεια 12 τετραγωνικά εκατοστά.
Τους τοποθετούμε στη σειρά όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Α) Ο Αχιλλέας έβαλε 187 τέτοιους κύβους στη σειρά. Ποιο είναι το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του σχήματος που δημιούργησε;

ΛΥΣΗ

Κάθε κύβος έχει 6 ίσες έδρες. Αφού η συνολική επιφάνεια του κάθε κύβου είναι 12 τ.εκ., συμπεραίνουμε ότι κάθε έδρα έχει επιφάνεια 12:6 = **2 τ.εκ.**

Επίσης παρατηρούμε ότι σε μια τέτοια διάταξη κύβων, ο 1ος και ο τελευταίος έχουν εκτεθειμένες 5 έδρες, ενώ οι ενδιάμεσοι κύβοι έχουν εκτεθειμένες 4 έδρες.
Άρα με 187 κύβους στη σειρά (άρα το πλήθος των ενδιάμεσων κύβων είναι 187-2=185) οι εκτεθειμένες έδρες είναι συνολικά $5+5+185\cdot 4=10+740=750$
Και καθεμιά έχει εμβαδό 2 τ. εκ.

Άρα η συνολική επιφάνεια του σχήματος είναι $2\cdot 750=1500$ τ. εκ.

Β) Η Αντιγόνη έβαλε και αυτή στη σειρά κύβους όπως και ο Αχιλλέας, αλλά το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του σχήματος που δημιούργησε ήταν κατά 8% μεγαλύτερο από του σχήματος του Αχιλλέα. Πόσους κύβους χρησιμοποίησε η Αντιγόνη;

ΛΥΣΗ

Αφού η επιφάνεια του παρόμοιου σχήματος της Αντιγόνης είναι κατά 8% μεγαλύτερη, θα ισούται με:

$$1500+\frac{8}{100}\cdot 1500=1500+8\cdot 15=1500+120=1620 \text{ τ. εκ.}$$

Και ξέρουμε ότι τα 20 τ. εκ. από αυτά οφείλονται στον 1ο και τον τελευταίο κύβο, που εκθέτουν 5 έδρες ή 10 τ. εκ. επιφάνειας έκαστος.

Στους υπόλοιπους (ενδιάμεσους) κύβους οφείλονται τα 1600 τ. εκ. που απομένουν. Αλλά οι υπόλοιποι κύβοι εκθέτουν 4 έδρες = 8 τ. εκ. έκαστος. Άρα το πλήθος τους είναι 1600 : 8 = 200.

Έτσι έχουμε 200 ενδιάμεσους κύβους, που μαζί με τον 1ο και τον τελευταίο δίνουν συνολικά 202 κύβους για το σχήμα της Αντιγόνης.